Zbierka príkladov pre oktávu

Zozbieranie príkladov: Nela Ďanovská
Spísanie, Úprava, Vypracovanie riešení: Matúš Hladký

Apríl 2022

Pár slov na úvod

Do rúk sa vám dostala zbierka príkladov pre oktávu. Ide o maturitný level príkladov, ktoré sme zozbierali počas Oktávy. Okrem toho sme spísali aj riešenie ku každému príkladu. Neznamená to ale, že iné riešenie nie je správne. Ak sa iným riešením dopracujete k rovnakému výsledku, je celkom veľká šanca, že je tiež správne. Dajte si ale pozor, v niektorých príkladoch ide priamo alebo nepriamo o správnu formuláciu dôkazu. V takom prípade je štruktúra tohto dôkazu spravidla to najdôležitejšie a treba byť opatrný pri jeho stavbe.

Každému maturantovi z matematiky odporúčame preriešenie týchto príkladov. Odporúčaný postup je príklad najskôr vypočítať sám a zamyslieť sa, či výsledok dáva zmysel. Následne skontrolovať výsledok podľa vzorového riešenia a zamyslieť sa, či sú riešenia identické. Ak nie sú identické, zamyslieť sa či obidve tvrdia to isté a či vo vašom riešení nechýba nejaký krok, ktorý je vo vzorovom riešení. Ak máte iný výsledok, skúste sa zamyslieť s pomocou vzorového riešenia, kde nastala vo vašom riešení chyba Ak ste si takto nenašli chybu, je možné, že ste našli ekvivalentné riešenie.

Aktuálnu verziu tohto dokumentu nájdete na *smnd.sk/matush/Ulohy_maturita.pdf*. Nikto nie je dokonalý a preto sa môže stať, že nájdete chybu vo vzorovom riešení. Ak sa tak stane, prosím povedzte nám o nej a my sa chybu pokúsime opraviť.

Príklady

Príklad 1: Pri daných funkciách určite obor hodnôt, či sú párne, nepárne, periodické:

$$f : y = x^3 * \sin(x)$$

$$g : y = x^3 + \sin(x)$$

$$h : y = |\cos(x)|$$

Riešenie: Nepárna funkcia spĺňa podmienku $f(x) = -f(-x)$Pre párnu platí $f(x) = f(-x)$. $\sin x$ a x^3 sú obidve nepárne funkcie. Preto pre f platí:

$$x^3 \sin(x) = (-1)(-x)^3(-1)\sin(-x) = (-x)^3 \sin(-x)$$

f je preto párna funkcia. Pre g platí:

$$x^3 + \sin(x) = (-1)(-x)^3 + (-1)\sin(-x) = (-1)((-x)^3 + \sin(-x))$$

g je preto nepárna funkcia.
$\cos(x)$ je párna funkcia. Preto keď z nej urobíme absolútnu hodnotu, tak ostane stále párna.
h je ako jediná periodická, lebo x^3 nie je, a preto f ani g nie sú periodické, lebo ich funkčné hodnoty v bodoch $\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{N}$ rastú s rastúcim k.
Čo sa týka oboru hodnôt, f aj g majú obor hodnôt $\mathbb{R}$. h má obor hodnôt len $< 0; 1 >$.

Príklad 2: Pomocou uvedených vzorcov odvoďte vzorec pre $\tan(\alpha + \beta)$ vyjadrený len pomocou $\tan(\alpha)$, $\tan(\beta)$. Na základe toho odvoďte vzorec pre výpočet $tan(2\alpha)$.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Riešenie:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

Čitateľ aj menovateľ predelíme $\cos(\beta)$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha) + \tan(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)) - \sin(\alpha)\tan(\beta)}$$

Čitateľ aj menovateľ predelíme $\cos(\alpha)$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Druhú časť úlohy dostaneme ak dosadíme $\beta = \alpha$:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

Príklad 3: Určite definičný obor funkcií:

$$f : y = \sqrt{\frac{-1}{5x^2 - 8x - 4}}$$

$$g : y = \log(5x^2 - 8x - 4)$$

Riešenie: Určíme korene kvadratickej funkcie:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+80}}{10} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{5}; x_2 = 2$$

Keďže ide o konvexnú kvadratickú funkciu, tak na intervale $(-\frac{2}{5}; 2)$ je záporná a inak je kladná. Pod odmocninou musí vyjsť kladné číslo a preto pre definičný obor funkcie f je $D(f) = (-\frac{2}{5}; 2)$. Logaritmus je definovaný len pre kladné hodnoty, a preto definičný obor funkcie g je $D(g) = (-\infty; -\frac{2}{5}) \cup (2; \infty)$

Príklad 4: Rozhodnite, či sa množiny v riadkoch rovnajú. Riešte graficky pomocou Vennových diagramov.

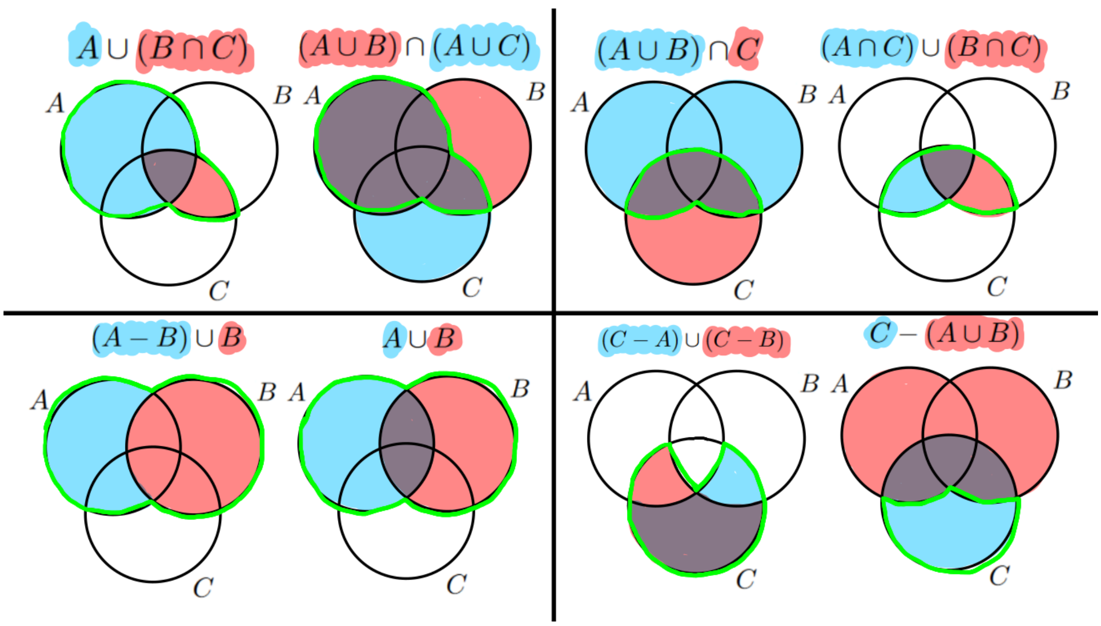
$$A \cup (B \cap C) \ldots (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C \ldots (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A - B) \cup B \ldots A \cup B$$

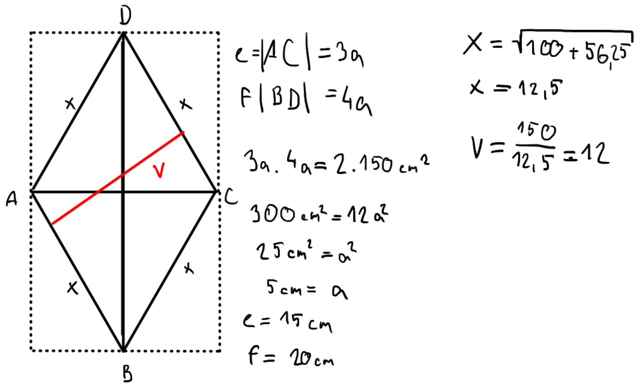
$$(C - A) \cup (C - B) \ldots C - (A \cup B)$$

Riešenie:



Príklad 5: Kosoštvorec má obsah $150cm^2$, pomer dĺžok uhlopriečok $e : f = 3 : 4$. Vypočítajte dĺžky uhlopriečok, strany a výšky.

Riešenie:



Príklad 6: Riaditeľ stavebného podniku oznámil investorovi: Ak subdodávatelia A a B splnia včas svoje úlohy, dokončíme za mesiac hrubú stavbu a začneme montáž technologického zariadenia." Výrok v úvodzovkách však nebol pravdivý. Čo sa stalo?

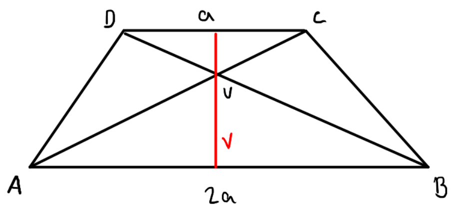
Riešenie: Nech "subdodávatelia A a B splnia včas svoje úlohy" je výrok A a "dokončíme za mesiac hrubú stavbu a začneme montáž technologického zariadenia" je výrok B. Celý výrok potom vieme napísať ako:

$$A \Rightarrow B$$

Vieme, že implikácia je nepravdivá, len ak prvý výrok (podmienka) je pravda a druhý nepravda. Preto nastal prípad, že subdodávatelia A a B splnili včas svoje úlohy, ale nesplnila sa druhá časť. Tá sa nesplnila, ak hrubá stavba nebola dokončená do mesiaca, alebo sa nezačala montáž technologického zariadenia.

Príklad 7: Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami $|AB| = 2a$, $|CD| = a$ a výškou v, ktorý je uhlopriečkami rozdelený na štyri trojuholníky, priesečník uhlopriečok označme U. Dokážte, že $\triangle AUD$ a $\triangle BCU$ majú rovnaký obsah. Určite pomer obsahov $\triangle ABU$ a $\triangle CDU$ a pomer obsahov $\triangle CDU$ a $\triangle ADU$.

Riešenie:



$$S(\triangle ABD) = S(\triangle ACB) = av$$

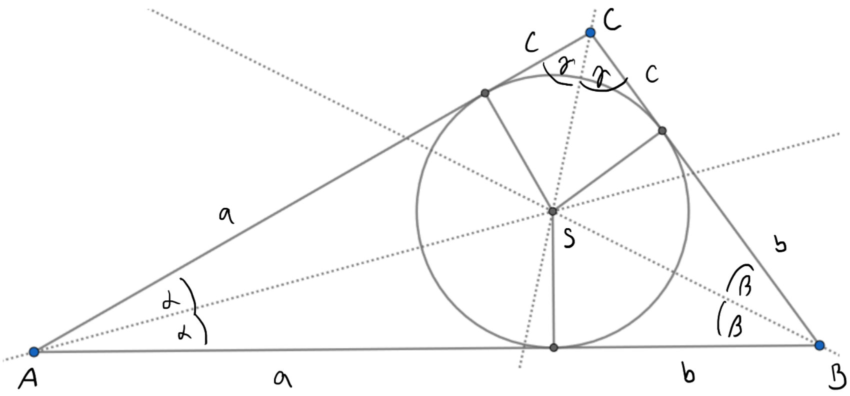
$$S(\triangle AUD) = S(\triangle ABD) - S(\triangle AUB) = S(\triangle ACB) - S(\triangle AUD) = S(\triangle BCU)$$

$$\triangle ABU \sim \triangle DCU \because (\measuredangle BAC = \measuredangle ACD \wedge \measuredangle ABD = \measuredangle BDC)$$

$$|AB| : |DC| = 2 : 1 \therefore \triangle ABU : \triangle CDU = 2 : 1 \Rightarrow S(\triangle ABU) : S(\triangle CDU) = 4 : 1$$
$$\triangle ABU : \triangle CDU = 2 : 1 \Rightarrow |AU| : |UC| = 2 : 1$$
$$v_{AU} = v_{UC} \therefore S(\triangle ADU) : S(\triangle CDU) = 2 : 1$$

Príklad 8: Odvoďte vzorec pre výpočet polomeru vpísanej kružnice od obsahu a strán trojuholníka.

Riešenie:



$$S = \frac{r(a+b) + r(b+c) + r(a+c)}{2} = r(|AB| + |BC| + |AC|) \Rightarrow r = \frac{2S}{|AB| + |BC| + |AC|}$$

Príklad 9: Máme 7 žiakov (A, B, C, D, E, F, G) – koľkými spôsobmi sa vedia postaviť do radu, ak:
a) Eliška musí byť prvá
b) Fero a Braňo musia stáť pri sebe
c) Eliška musí byť prvá, Fero a Braňo musia stáť pri sebe

Riešenie: a) Ak E musí byť prvá, počítame len permutácie na posledných 6 miestach. Na 2. miesto je 6 možností, na 3. 5 ... . Dohromady 6!.
b) F a B považujeme najskôr za dvojicu, ktorej priraďujeme len jedno miesto. Preto počet všetkých permutácii bude tiež $6! = 720$. To ale ešte treba vynásobiť 2, lebo F a B vieme v dvojici vymeniť. Preto $6! * 2 = 1440$.
c) Máme kombináciu prvých dvoch prípadov. Preto vyberáme len posledných 6 miest, a F a B považujeme za dvojicu. Preto $5! * 2 = 240$.

Príklad 10: Aká je pravdepodobnosť, že z n hodov kockou padne 6-ka práve k-krát? $(n > k > 0)$

Riešenie: Všetkých možností je 6^n. Počet vyhovujúcich je $\binom{n}{k}5^{(n-k)}$. Najskôr vyberieme 6-ky a potom prenásobíme počtom možností na ostatné miesta. Preto pravdepodobnosť, že padne k 6 pri n hodoch je:

$$\frac{\binom{n}{k}5^{(n-k)}}{6^n}$$

Príklad 11: Koľko stojí vykopanie 12m hlbokej studne, ak vykopanie 1. metra zaplatíme 10€ a za každý ďalší meter 2-krát toľko ako za predchádzajúci?

Riešenie: Ide o geometrickú postupnosť s prvým členom 10 a kvocientom 2. Použijeme vzorec pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti.

$$s_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1} = 10\frac{2^{12} - 1}{2 - 1} = 40950$$

Príklad 12: Odvoďte vzorec pre výpočet súčtu prvých n členov aritmetickej postupnosti, keď poznáme prvý a posledný (n-tý) člen.

Riešenie: Súčet prvých n členov vieme zapísať dvoma spôsobmi:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$
$$S_n = (a_n - (n-1)d) + (a_n - (n-2)d) + ... + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

Keď tieto dve rovnice sčítame a upravíme, dostaneme vzorec pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \therefore S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Príklad 13: Koľko 3-ciferných prirodzených čísel možno vytvoriť z číslic 1 – 7 (vrátane), ak sa môžu číslice opakovať? Aká je pravdepodobnosť, že číslo, ktoré náhodne vyberieme, bude deliteľné:
a) 5
b) 4

Riešenie: Pre každú cifru máme 7 možností. Preto všetkých možností je 7^3.
Aby bolo číslo deliteľné 5 musí sa končiť 0 alebo 5. V našom prípade sa môže končiť len 5. Zvyšné dve cifry môžu byť hocijaké, takže takých čísel je 7^2. Pravdepodobnosť že vyberieme číslo deliteľné 5 je preto $\frac{7^2}{7^3} = \frac{1}{7}$.
Aby bolo číslo deliteľné 4 musia byť jeho zvyšok po delení 100 deliteľný 4. Z čísiel $1 - 7$ vieme vyskladať tieto zvyšky pre ktoré to platí 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64, 72, 76. Na posledné dve cifry máme preto 11 vyhovujúcich možností. Prvá cifra môže byť hocijaká. Pravdepodobnosť, že vyberieme číslo, ktoré je deliteľné 4 je preto $\frac{7*11}{7^3} = \frac{11}{49}$

Príklad 14: Dokážte, že $\sqrt{3}$ je iracionálne číslo.

Riešenie: Použijeme dôkaz sporom, keď sa budeme snažiť dokázať, že $\sqrt{3}$ je racionálne čísla, teda $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, kde a a b sú nesúdeliteľné čísla (základný tvar zlomku). Preto $3 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 3b^2 = a^2$. Preto $3|a^2$. Predpokladajme, že platí $3|a^2 \Rightarrow 3|a$. Potom $3b^2 = a^2 = (3k)^2 = 9k^2 \Rightarrow b^2 = 3k \Rightarrow 3|b^2$. To je spor, lebo a, b sú nesúdeliteľné.
Ostáva dokázať $3|a^2 \Rightarrow 3|a$. Použijeme nepriamy dôkaz, keď dokážeme, že platí obmenený výraz $3 \nmid a \Rightarrow 3 \nmid a^2$. Preto:

$$(1)\ a = 3k + 1 \qquad (2)\ a = 3k + 2$$

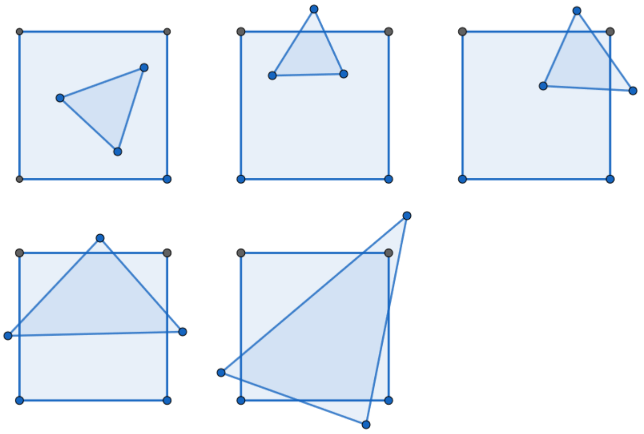
z toho:

$$(1)\ a^2 = 9k^2 + 6k + 1 \qquad (2)\ a^2 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

Tým sme dokázali obmenený výraz, lebo sme rozobrali všetky možnosti.

Príklad 15: Koľko vrcholov môže mať n-uholník, ktorý vznikne prienikom štvorca a trojuholníka?

Riešenie: Trojuholník môžeme vytvoriť tromi rôznobežnými priamkami. Štvorec je konvexný útvar. To znamená, že neexistujú dva body, ktorých spojnica má bod, ktorý leží mimo útvaru. Preto ak priamka pretína štvorec, tak doňho maximálne raz vojde a potom aj vyjde. Preto, z každej strany trojuholníku a štvoruholníku vieme použiť len jeden úsek. To znamená dohromady 7 úsekov. 3-uholník až 7-uholník vieme dostať ako:



Príklad 16: Aké čísla chýbajú v postupnosti 3__18, ak prvé tri čísla tvoria geometrickú a posledné tri aritmetickú postupnosť?

Riešenie: Vieme si napísať 4 rovnice:

$$(1)\ 3q = a \qquad (2)\ 3q^2 = b \qquad (3)\ a + 2k = 18 \qquad (4)\ b + k = 18$$

$$(4)\ k = 18 - b \rightarrow (3)\ a + 2 * 18 - 2b = 18 \Rightarrow a = 2b - 18$$

$$(3) \rightarrow (1)\ 3q = 2b - 18 \rightarrow (2)\ 3q^2 = \frac{3}{2}q + 9 \Rightarrow 3q^2 - \frac{3}{2}q - 9 = 0$$

Výsledná kvadratická rovnica má dve riešenia v tvare $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{2}$. Preto postupnosť má dve riešenia:

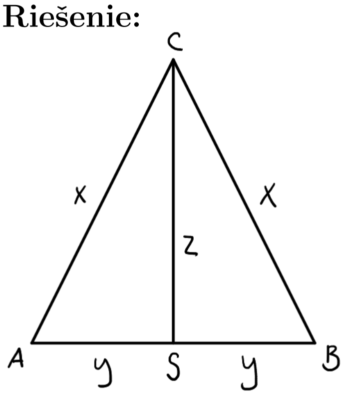
$$3; 6; 12; 18 \qquad 3; -\frac{9}{2}; \frac{27}{4}; 18$$

Príklad 17: Máme pravidelný mnohouholník. Jeho strany zvierajú uhol 108. r je polomer kružnice vpísanej do mnohouholníka.
a) Koľko uholník to je?
b) Odvoď dĺžku strany za pomoci r.

Riešenie: Spojnice vrcholu pravidelného mnohouholníku a jeho stredu rozpoluje uhol pri vrchole na polovice. Preto trojuholník ktorý vznikne spojením stredu s dvomi susednými vrcholmi je rovnoramenný a súčet uhlov pri vrcholoch mnohouholníku v tomto trojuholníku je rovnaký ako vnútorný uhol mnohouholníku. Uhol pri strede je preto doplnok do 180 tohto uhlu. Takýchto uhlov je dohromady n pri strede. Preto náš n uholník je $\frac{360}{180-108} = 5$. Pre stranu 5-uholníku platí $\frac{a}{2r} = \tan(36)$. Preto stranu 5-uholníku vieme vyjadriť ako $a = 2r\tan(36)$.

Príklad 18: Máme rovnoramenný $\triangle ABC$; $|AC| = |BC|$; má ťažnicu CS_C. Dokáž, že táto ťažnica mu je zároveň aj výškou.

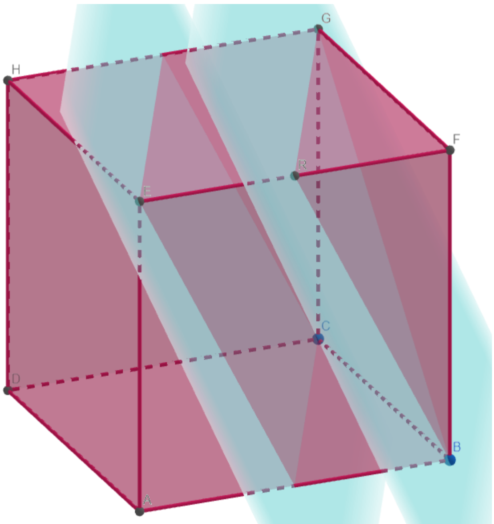
Riešenie:



$\triangle ASC$ a $\triangle BSC$ sú rovnaké, na základe vety SSS. Preto $\measuredangle ASC = \measuredangle BSC$. Okrem toho $\measuredangle ASC + \measuredangle BSC = 180$. Preto $\measuredangle ASC = \measuredangle BSC = 90$. To znamená, že ťažnica na stranu AB je v tomto prípade aj výška.

Príklad 19: Máme kocku $ABCDEFGH$; R je stred $|EF|$; zostrojíme 2 rovnobežné roviny α a β; $RGB \in \alpha$; $E \in \beta$. Zisti obsah rezových mnohouholníkov.

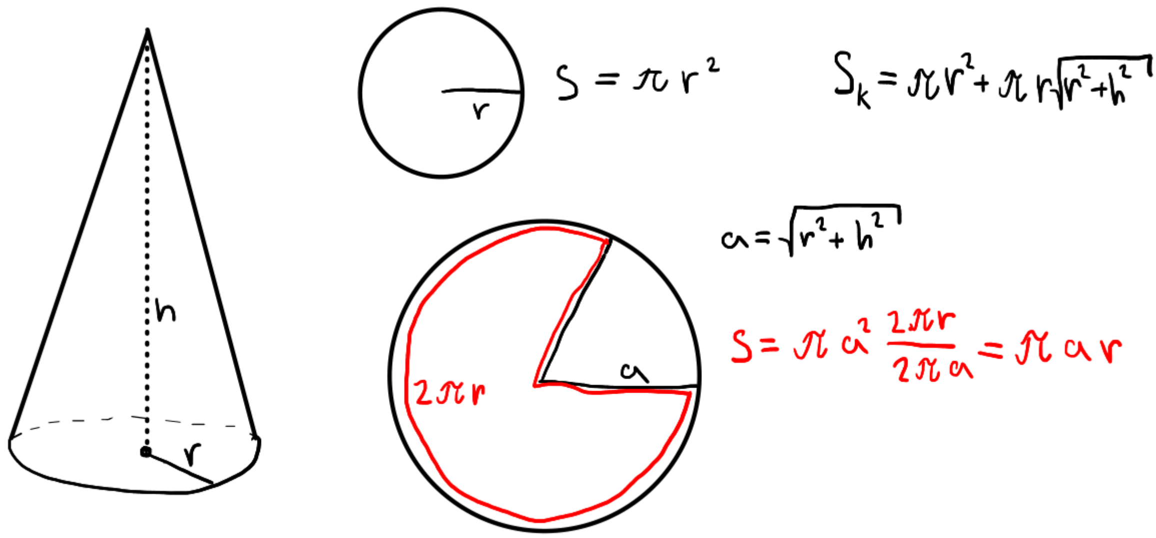
Riešenie:



Rezový mnohouholník vytvorený rovinou α je rovnoramenný trojuholník, lebo $|GR| = |BR|$. Ak kocka má hranu $2a$, tak tento trojuholník má strany $|BG| = 2a\sqrt{2}$, $|GR| = |BR| = a\sqrt{5}$. Výšku trojuholníku vieme vypočítať pytagorovou vetou $v = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$. Preto obsah je $S = a^2\sqrt{6}$.
Rezový mnohouholník tvorený rovinou β má všetky strany rovnaké, lebo každá strana je spojnicou vrcholu kocky a stredu hrany ne ktorej daný vrchol neleží, patriacej rovnakej stene ako daný vrchol. Tento kosoštvorec má uhlopriečky $2a\sqrt{3}$ a $2a\sqrt{2}$. Preto jeho obsah bude $2a^2\sqrt{6}$.

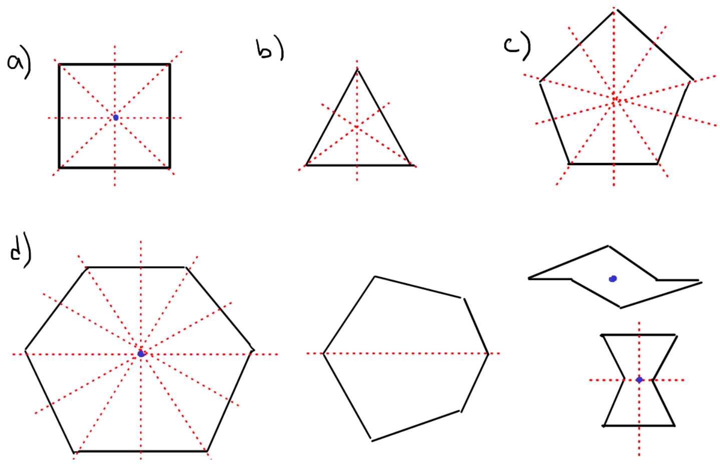
Príklad 20: Odvoďte vzorec povrchu kužela.

Riešenie:



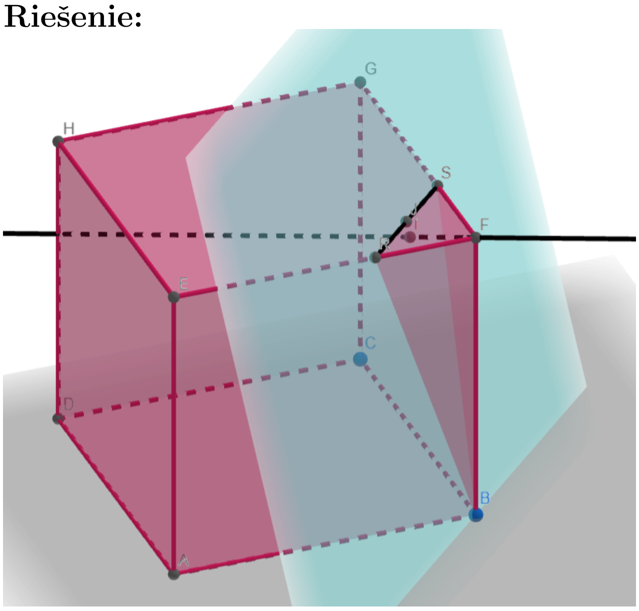
Príklad 21: Zisti, koľko stredov a osí súmernosti má: a) štvorec, b) rovnostranný trojuholník, c) päťuholník, d) šesťuholník

Riešenie:



Príklad 22: Kocka ABCDEFGH: $R \in EF; |ER| = 2|RF|$, $S \in FG; |SG| = 2|SF|$. Graficky nájdite vzdialenosť F od roviny RSB

Riešenie:



Najskôr rozdelíme úsečku na tretiny (postup je napísaný neskôr). Následne narysujeme $\triangle SFR$. Teraz vieme zistiť vzdialenosť $|FJ|$, lebo je to výška a zároveň ťažnica $\triangle SFR$. Narysujeme $\triangle FJB$, kde poznáme $|FB|$, $\measuredangle BFJ$ a $|FJ|$. Následne spravíme výšku na stranu $|JB|$, čo je hľadaná vzdialenosť.
Úsečku $|AB|$ vieme rozdeliť na tretiny tak, že narysujeme $p; A \in p; B \notin p$. Následne $P_1, P_2, P_3 \in p; |AP_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3|$. Následne $q; P_1 \in q; q \parallel P_3B$, $X \in AB \cap q$. $3|AX| = |AB|$

Príklad 23: Všetky $k \in \mathbb{Z} : 3|k^2 \Rightarrow 3|k$. a) Napíšte obrátenú implikáciu; b) obmenu; c) negáciu; d) dokážte výrok

Riešenie: Obrátená implikácia $3|k \Rightarrow 3|k^2$. Obmena $3 \nmid k \Rightarrow 3 \nmid k^2$. Negácia $(3|k^2) \wedge \neg(3|k)$.

Priamy dôkaz: a vieme napísať jedným z nasledujúcich spôsobov:

$$(1)\ a = 3k \qquad (2)\ a = 3k+1 \qquad (3)\ a = 3k+2$$

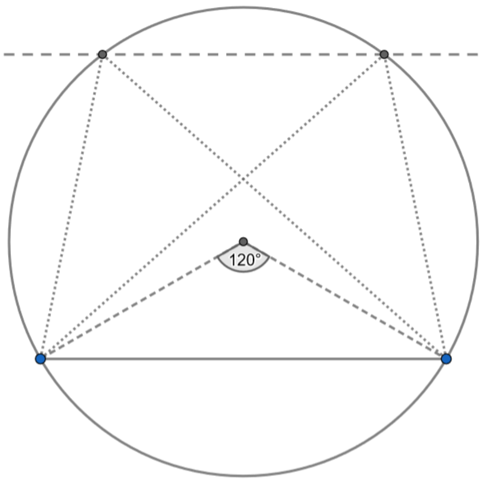
Z toho:

$$(1)\ a^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$$
$$(2)\ a^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$
$$(3)\ a^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 6k + 1) + 1$$

Aby platila podmienka implikácie, musí platiť (1) $a = 3k$ keby platí aj druhá časť implikácie, čím sme dokázali $3|a^2 \Rightarrow 3|a$.

Príklad 24: $|AB| = 4cm$; zostrojte všetky ABC ak $\measuredangle ACB = 60$ a výška na stranu c je $3cm$. a) Zmeňte jeden údaj v zadaní, aby úloha mala iba 1 riešenie

Riešenie:
1) $|AB| = 4m$
2) $p \parallel AB; p, AB = 3cm$
3) Kružnica k nad úsečkou $|AB|$ so stredovým uhlom 120
4) $C \in p \cap k$
5) $\triangle ABC$



Vieme zmeniť výšku, tak aby sa p len dotýkala kružnice k. Bude sa dotýkať, ak $v_C = \frac{2}{\tan(60)} + \frac{2}{\sin(60)} = 2\sqrt{3} = 3.464101615cm$

Príklad 25: Ak $n > 1$ je ľubovoľné prirodzené číslo a ak d je jeho najmenší kladný deliteľ, tak d je nepárne. (dokážte)

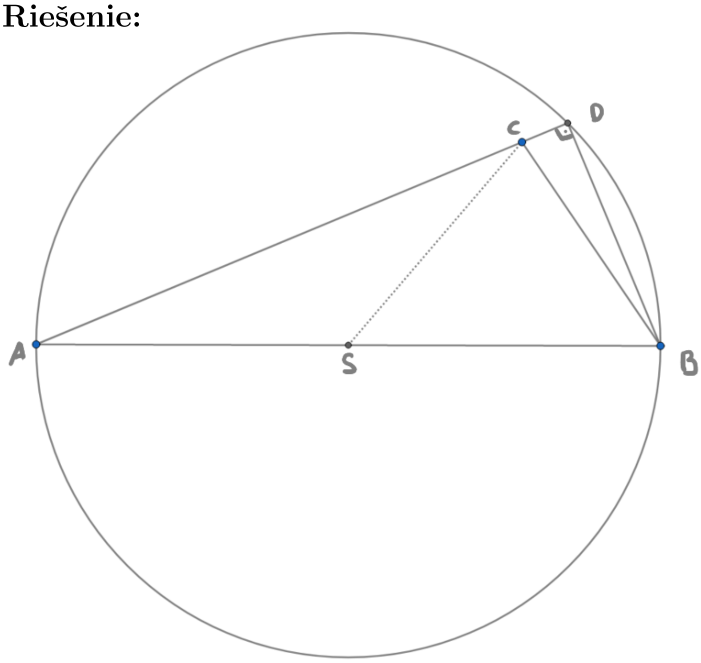
Riešenie: 1 delí všetky prirodzené čísla a zároveň je to pre všetky aj najmenší deliteľ. Preto d je vždy nepárne.

Príklad 26: Zostroj rovnobežník $ABCD$; $|AB| = 8$; $V_{AB} = 6$; $\measuredangle ASB = 90$; $S \in AC \cap BD$. a) Zmeňte jeden údaj, aby mala úloha 1 iba riešenie; b) 0 riešení

Riešenie:
1) $|AB| = 8$
2) $p \parallel |AB|; V_{AB} = 3$
3) $X \in |AB|; |AX| = |XB|$
4) $k; (X; |AX|)$
5) $S \in k \cap p$
6) Dorysovanie rovnobežníku
Nejednoznačné je to, že k a p majú dva priesečníky. Aby mala úloha jedno riešenie, vieme zmeniť $|AB| = 6$, alebo $V_{AB} = 8$, alebo $\measuredangle ASB = 2 \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 106.2602047$.
Aby neexistovalo riešenie, treba aby sa k a p nepretli. Na to vieme zmeniť jeden údaj nasledovne $|AB| < 6$, $V_{AB} > 8$ alebo $\measuredangle ASB > 2 \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 106.2602047$

Príklad 27: ABC, kde $t_C < \frac{1}{2}c$. Ukáž, že $\measuredangle ACB$ bude väčší ako 90

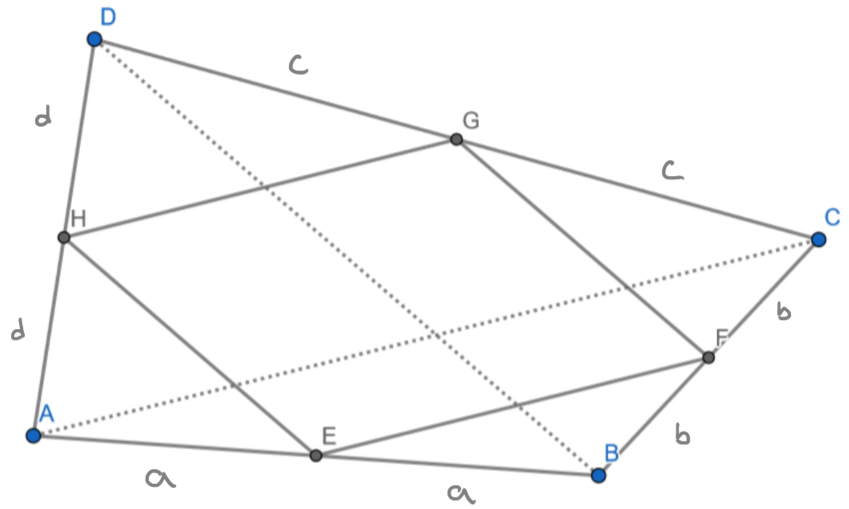
Riešenie:



$\measuredangle ADB = 90$ lebo D leží na Talesovej kružnici nad úsečkou AB Preto $\measuredangle BCD < 90$. Preto $\measuredangle ACB = 180 - \measuredangle BCD > 90$

Príklad 28: Dokážte, že stredy strán ľubovoľného štvoruholníka tvoria rovnobežník.

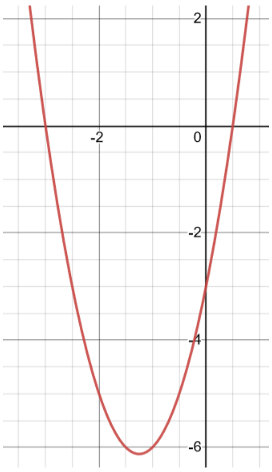
Riešenie:



Keďže EF je stredná priečka ABC, tak platí $EF \parallel AC$. Podobne vieme dokázať $GH \parallel AC$. Preto $EF \parallel HG$. Analogicky vieme dokázať $EH \parallel FG$. Preto stredy strán hocijakého štvoruholníku tvoria rovnobežník.

Príklad 29: $f(0) = -3$; $f(-1) = -6$; $f(2) = 15$; Urob predpis (kvadratická), graf a vypíš vlastnosti.

Riešenie: Vo všeobecnosti $y = ax^2 + bx + c$. Keďže $f(0) = -3$, tak $c = -3$. Dostávame dve rovnice $a - b - 3 = -6$ a $4a + 2b - 3 = 15$. Z prvej vyjadríme a a dosadíme do druhej. Dostávame $4(b - 3) + 2b - 3 = 15 = 6b - 15$, preto $b = 5$. Z toho $a = 2$. Preto $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$.
Vieme urobiť rozklad na $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$. Z toho vieme korene $\frac{1}{2}$ a -3. X-ová súradnica vrcholu je aritmetický priemer koreňov. Preto pre vrchol $x = -\frac{5}{4}$ a $y = -\frac{49}{8}$



Príklad 30: Pravidelný štvorboký hranol. Telesová uhlopriečka a rovina podstavy zvierajú uhol 60; hrana podstavy je $5cm$. Urči povrch a objem hranola.

Riešenie: Priemer postavy je $5\sqrt{2}$. Preto platí $v = 5\sqrt{2}\tan(60)$. Obsah je preto $S = 2(5 * 5) + 4(5 * 5 * \sqrt{2} * \tan(60)) = 294,949cm^2$. Objem je $V = 5 * 5 * 5 * \sqrt{2} * tg(60) = 306,186cm^3$

Príklad 31: Vyvŕtajte do kocky dieru tvaru valca tak, aby malo vzniknuté teleso väčší povrch ako kocka.

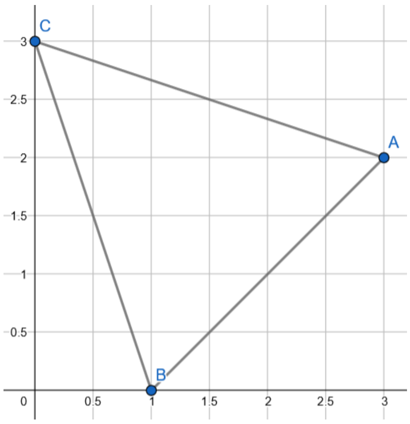
Riešenie: Aby bol výsledný povrch väčší ako pôvodný, tak musí platiť, že povrch podstavy je menší ako povrch plášťu vyvŕtanej diery. Preto musí platiť $2\pi r^2 < 2\pi ra$. To sa dá zjednodušiť na $r < a$. Vidno, aby táto podmienka neplatila, diera by musela mať väčší priemer ako je strana kocky, takže kocka by už nebola v jednom kuse. Preto môže hocijakú rozumnú dieru vyvŕtame, tak zväčšíme povrch kocky

---

Príklad 32: ABC; $A = [3,2]$; $B = [1,0]$; $C = [0,3]$. Urči ortocentrum trojuholníka.

Riešenie: Smerový vektor AB je $(2;2)$. Preto rovnica výšky na stranu c bude mať tvar $2x+2y+c=0$. Musí prechádzať cez bod C, takže rovnica výšky na C vyzerá nasledovne $x+y-3=0$. Obdobným spôsobom vieme napísať priamku ktorej patrí výška na A ktorá vyzerá $-x+3y-3=0$. Ortocentrum je priesečník týchto dvoch priamok, takže riešime sústavu rovníc.

$$x = 3 - y \Rightarrow y - 3 + 3y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



Príklad 33: Peter a Pavol čakajú pred kinom Adama, Borisa a Cyrila.
Peter: Ak príde Adam a Boris, príde aj Cyril."
Pavol: Ak príde Adam a nepríde Cyril, nepríde ani Boris."
Rozhodni, či sú tieto tvrdenia to isté.

Riešenie: Napíšme si obidva výroky a použime prepis implikácie na alebo ($A \Rightarrow B = \neg A \vee B$):

$$(A \wedge B) \Rightarrow C = \neg(A \wedge B) \vee C = (\neg A \vee \neg B) \vee C$$

$$(A \wedge \neg C) \Rightarrow \neg B = \neg(A \wedge \neg C) \vee \neg B = (\neg A \vee C) \vee \neg B$$

Kedže alebo je komutatívne (nezáleží na poradí) vieme odstrániť zátvorky a dostaneme identické výroky. Preto ide o identické výroky.

Príklad 34: Vyjadrite:
a) Obsah štvorca ako funkciu jeho uhlopriečky
b) Obvod rovnostranného trojuholníka ako funkciu obsahu
c) Obsah rovnostranného trojuholníka ako funkciu výšky

Riešenie: Z pytagorovej vety vieme, že uhlopriečka štvorca je $\sqrt{2}a$, kde a je strana štvorca. Preto ak u je dĺžka uhlopriečky, tak strana štvorca je $a = \frac{u}{\sqrt{2}}$ a z toho $S = \frac{u^2}{2}$
Obsah je $S = \frac{av}{2}$. Výška od strany je $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 \Rightarrow v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Dosadíme $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$. Pre obvod platí $o = 3a = 2\sqrt[4]{3^3}\sqrt{S}$
Stále platí $S = \frac{av}{2}$. Pre stranu splatí $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2$. Z toho $a = \frac{2v}{\sqrt{3}}$. Po dosadení dostávame $\frac{v^2}{\sqrt{3}}$

Príklad 35: Odvoďte vzorec na výpočet počtu uhlopriečok v konvexnom n-uholníku.

Riešenie: Máme n vrcholov. Z každého ide $n - 3$ uhlopriečok. Nemôže ísť do rovnakého a do vedľajších. Týmto spôsobom započítame každú uhlopriečku dva krát, lebo spája dva vrcholy. Preto vzorec je:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Druhý spôsob je, že spočítame, koľko dvojíc vrcholov vieme vybrať a odpočítame tie dvojice, ktoré tvoria obvod n-uholníku, Tých je n. Preto to vieme vypočítať ako:

$$\binom{n}{2} - n$$

Príklad 36: Pre ktoré hodnoty parametra a má sústava rovníc:

$$4x + ay = 10$$

$$2x – 5y = 5$$

a) 1 riešenie;
b) Nekonečno veľa riešení;
c) Žiadne riešenie

Riešenie: Lineárna funkcia je priamka. Riešenia sústavy rovníc sú prieniky týchto priamok. Dve priamky môžu mať jedno riešenie, ak sú rôznobežné. Ak sú rovnobežné, tak môžu mať 0 riešení, ak nie sú identické alebo nekonečno, ak sú identické. Aby boli naše priamky rovnobežné, musí byť normálový vektor priamky rovnobežný. Preto $a = -10$. V tom prípade vidíme, že horná rovnica je dvojnásobkom dolnej, takže sú identické. Preto nevedia mať 0 riešení. Ak je c hocičo okrem -10 priamku sú rôznobežné a majú práve jedno riešenie.

Príklad 37: $k_1 : r = 5.5$; $k_2 : r = 2.5$; $k_3 : r = 1.5$; Zostrojte:
a) Aby mali všetky vonkajší dotyk
b) k1;k2 – vnútorný; k2;k3 – vonkajší

Riešenie: Aby mali všetky vonkajší dotyk musí platiť $|S_1S_2| = 8$, $|S_1S_3| = 7$, $|S_2S_3| = 4$. Aby k_1 a k_2 mali vnútorný dotyk, S_2 musí ležať na kružnici so stredom v bode S_1 a polomerom 3. Aby k_2 a k_3 mali vonkajší dotyk, S_3 musí ležať na kružnici so stredom v bode S_2 a polomerom 4.

Príklad 38: Pravidelný 4-boký ihlan $ABCDV$; $a = 6$; $v = 3\sqrt{2}$. Dokáž, že AV je kolmé na CV. Aký je uhol VA a CB?

Riešenie: Aby platilo $|AV| \perp |CV|$ musí platiť z pytagorovej vety $|AC|^2 = |AV|^2 + |CV|^2$. $|AC| = 6\sqrt{2}$. $|AV|$ je z pytagorovej vety $|AV| = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$. Rovnako vieme $|CV| = 6$. Preto $\measuredangle AVC$ je skutočne kolmý.
Keďže $DA \parallel BC$, tak $\measuredangle VA, CB = \measuredangle VA, DA$. $\triangle AVD$ je rovnostranný, lebo ihlan je pravidelný a preto $|AV| = |DV|$. Preto $\measuredangle VA, CB = 60$.

Príklad 39: V urne je a bielych a b čiernych guľôčok. Ťaháme 2-krát po sebe po 1 guľôčke.
a) Pravdepodobnosť, že aspoň 1 je biela (po prvom vytiahnutí vrátime guľôčku späť)
b) Pravdepodobnosť, že sú obe biele (nevraciame)

Riešenie: Pravdepodobnosť, že aspoň jedna je biela, je 1 mínus pravdepodobnosť, že obe budú čiarne. Preto $1 - \left(\frac{b}{a+b}\right)^2$
Pravdepodobnosť, že obidve budú biele, je $\frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1}$

Príklad 40: Máme priamky p a q a bod S. Zostrojte štvorec $ABCD$ so stredom $S : A \in p$; $C \in q$. Otvorte diskusiu o vzájomných polohách S, p, q.

Riešenie: Body A a C sú súmerné podľa S. Zobrazíme preto množinu do ktorej patrí bod A podľa S, takže zobrazíme priamku p na priamku p' podľa bodu S. Potom $C \in p' \cap q$. Zo stredu a jedného vrcholu dorobíme štvorec $ABCD$.
Problém jedine nastane, ak $p' \cap q =$. To sa stane len ak sú rovnobežné a majú rôzny vzdialenosť od bodu S (výnimku má prípad, keď sú rovnobežné a S je medzi v nimi, vtedy $p' \cap q = q$ a štvorec nie je jednoznačne daný).

Príklad 41: Dokáž:

$$(\tan(x) + \cot(x))^2 - (\tan(x) - \cot(x))^2 = 4$$

Riešenie:

$$\tan^2(x) + 2\tan(x)\cot(x) + \cot^2(x) - \tan^2(x) + 2\tan(x)\cot(x) - \cot^2(x) = 4$$

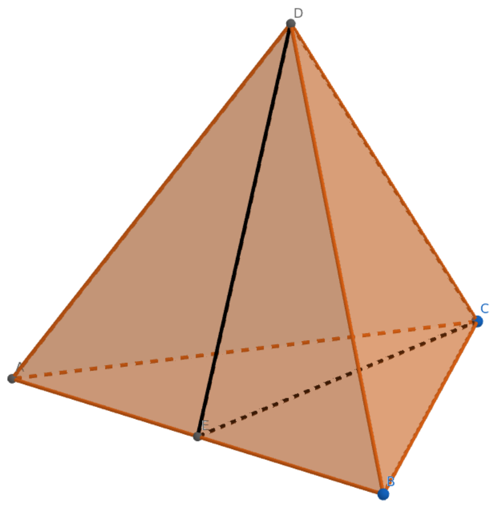
$$4\tan(x)\cot(x) = 4$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 1$$

Príklad 42: Pravidelný 4-sten
a) Uhol dvoch stien
b) Uhol steny a hrany

Riešenie: Uhol dvoch stien v pravidelnom štvorstene vieme počítať ako uhol dvoch ťažníc jeho strán. (Lebo pravidelný štvorsten má steny rovnostranné trojuholníky a tie majú ťažnice identické s výškami.) Preto máme trojuholník tvorený stranou a dvoma ťažnicami a počítame uhol medzi ťažnicami. Nech strana má dĺžku $2a; a \in \mathbb{R}^+$. Potom výška je dlhá $a\sqrt{3}$. Uhol medzi ramenami rovnoramenného trojuholníka vieme vypočítať pomocou sin. V tomto prípade to bude $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{a}{a\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 70.52877937$.
Kolmý priemet strany na stenu je identický s ťažnicou tej steny. Preto uhol hrany a strany je uhol hrany a ťažnice danej steny. Taký trojuholník sme už mali v predošlej podotázke. Keďže ide o rovnoramenný trojuholník, tak zvyšné dva uhly sú rovnaké:

$$\beta = \frac{180 - \alpha}{2} = 63.43494882$$



Príklad 43: Odvoďte vzorec na výpočet koreňov kvadratickej rovnice.

Riešenie:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Príklad 44: $y = ax^2 + bx + c$ vysvetlite postup pri zostrojovaní grafu a určovaní základných vlastností danej funkcie pomocou doplnenia na druhú mocninu dvojčlena.

Riešenie: Úprava:

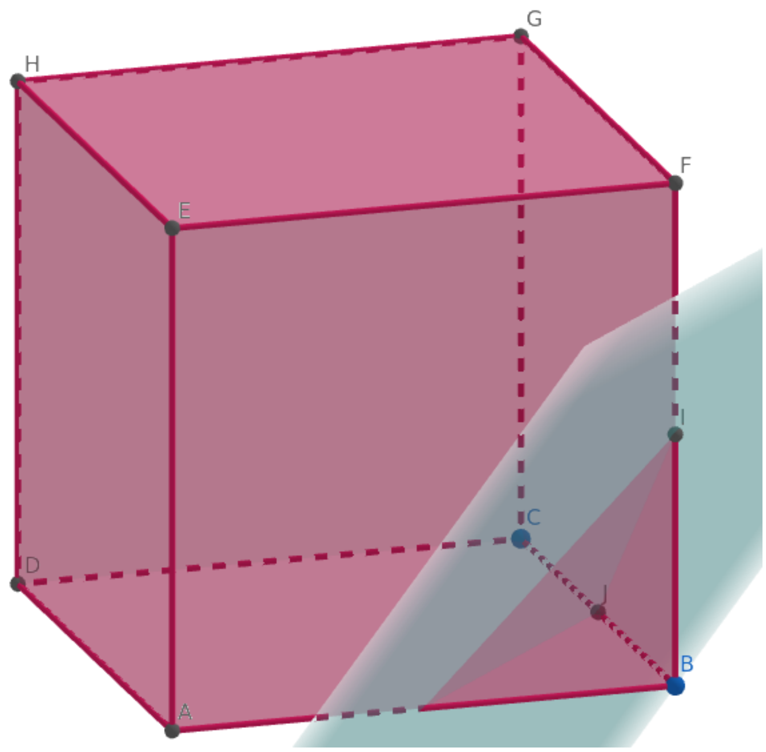
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

Vidíme, že vnútorná zátvorka je vždy kladná, preto extrém bude keď bude rovná 0. To je pri $-\frac{b}{2a}$ a vtedy má funkcia vrchol. Rovnako vieme určiť či je parabola konkávna alebo konvexná. Ak je a kladné, parabola je konvexná a ak je záporné je konkávna.
Vieme pokračovať hľadaním koreňov:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Príklad 45: Kocka $ABCDEFGH$; hrana dĺžky 2; K je stred BF; L je stred BC; rovina α; $K, L \in \alpha$; EG je rovnobežné s α. Určite obsah rezu kocky rovinou α.

Riešenie: $EG \parallel AC$, preto stred úsečky $|AB|$ patrí tiež rovine α. Z pytagorovej vety preto vieme, že rez kocky rovinou α má tvar rovnostranného trojuholníku so stranou $a = \sqrt{2}$. Z pytagorovej vety vieme $2 = \frac{1}{2} + v^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Z toho $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Príklad 46: Odvoďte výpočet na počet podmnožín pre n-prvkovú množinu.

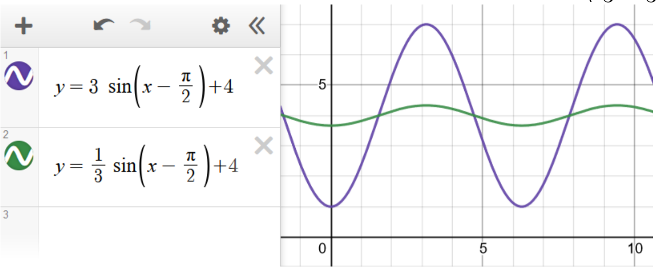
Riešenie: V množine prvok buď je alebo nie je. Preto keď vytvárame podmnožinu, o každom prvku rozhodujeme, či tam bude, alebo nebude. Rovnako môžeme nájsť počet všetkých možností ako vybrať 0, 1, 2... $n-1$, n prvkov z množiny. To urobíme kombinačnými číslami. Preto počet podmnožín vieme vypočítať ako:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Príklad 47: Nakreslite graf, popíšte vlastnosti a čo sa stane, ak 3 zmeníme na $\frac{1}{3}$?

$$3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$$

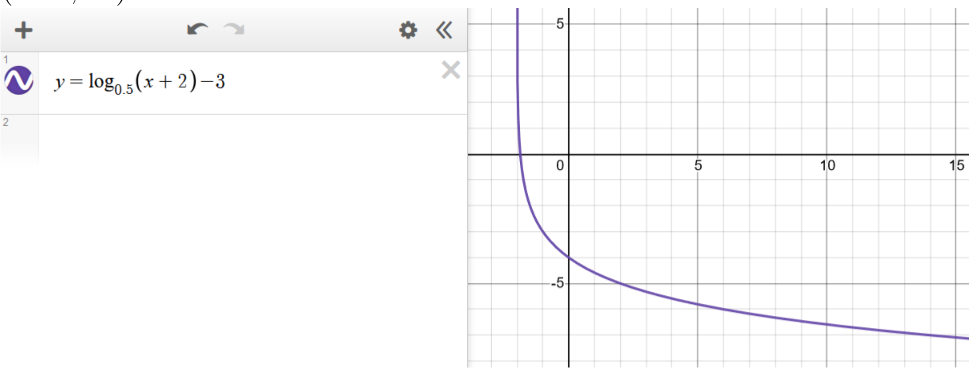
Riešenie: Keďže je sínus vynásobený 3, jeho obor hodnôt bude $< -3; 3 >$. Keďže vnútri je $x - \frac{\pi}{2}$ bude funkcia posunutá o štvrť periódy doprava. (Bude nadobúdať hodnoty, ktoré by nadobúdal pred štvrť periódou.) +4 na konci znamená, že celý bude posunutý o 4 hore, takže jeho reálny obor hodnôt bude $< 1; 7 >$. Keď zmeníme 3 na $\frac{1}{3}$ zmenší sa maximálna a minimálna hodnota. Obor hodnôt bude $\left\langle \frac{11}{3}; \frac{13}{3} \right\rangle$



Príklad 48: Určte definičný obor, obor hodnôt a načrtnite graf funkcie

$$f : y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2) - 3$$

Riešenie: Logaritmus je definovaný pre všetky kladné čísla. Preto $x + 2 > 0 \Rightarrow D(f) = (-2; \infty)$. Logaritmus môže nadobudnúť hodnotu hocijakého reálneho čísla. Preto $H(f) = (-\infty; \infty)$



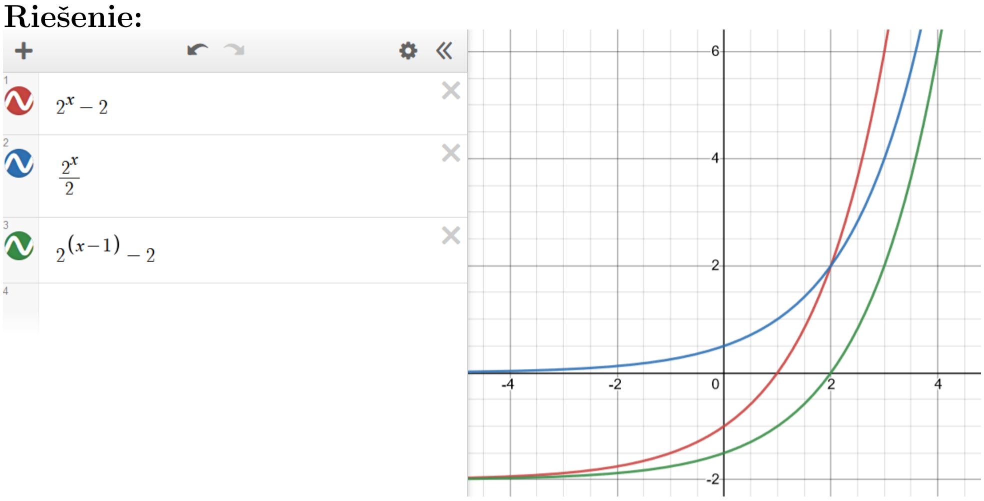
Príklad 49: Zostrojte grafy funkcií:

$$f : y = 2^x - 2$$

$$g : y = \frac{2^x}{2}$$

$$h : y = 2^{x-1} - 2$$

Riešenie:



Príklad 50: Dokážte tvrdenie:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 3|(n^3 + 2n)$$

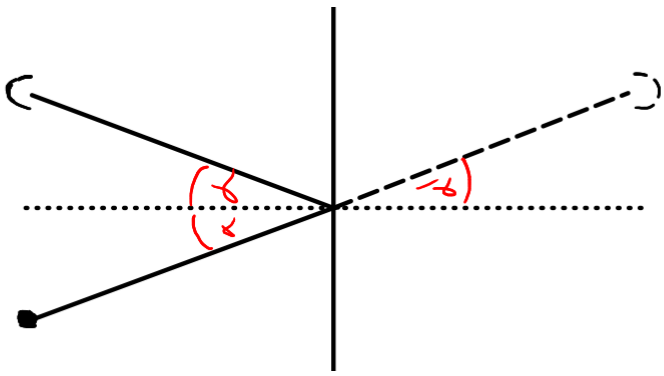
Riešenie:

$$3|(n(n+1)(n+2)) = 3|(n^3 + 3n^2 + 2n)$$

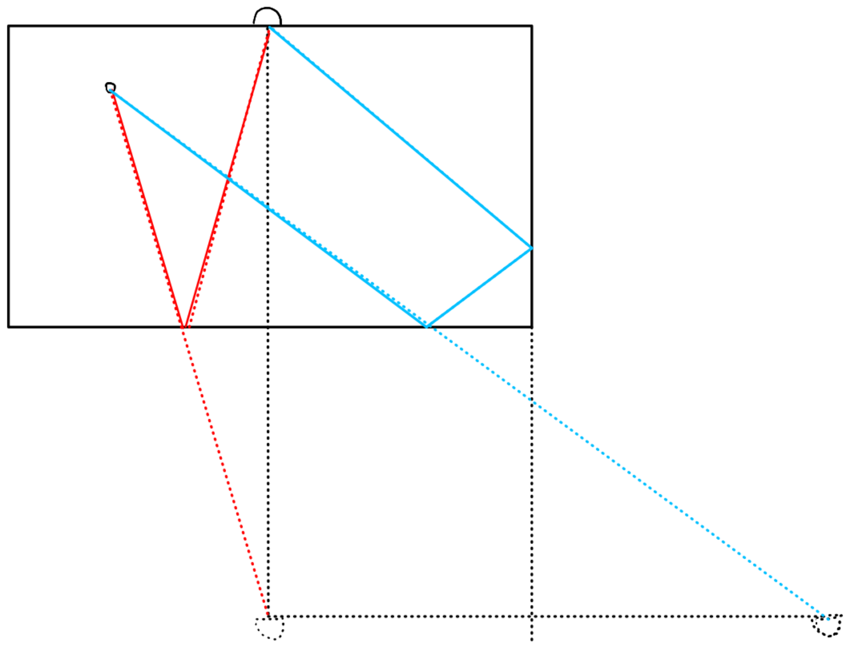
Súčin troch po sebe idúcich čísiel je určite deliteľný tri, lebo aspoň jedno z nich je. Preto Rovnica vyššie určite platí. Keďže $3|3n^2$, tak platí aj $3|(n^3 + 2n)$ čo je výrok zo zadania.

Príklad 51: Hráme biliard. Ako máme nasmerovať tágo, aby guľa spadla do jamky (strednej)
a) na jeden odraz
b) dva odrazy

Riešenie: Pri odrazoch platí zákon dopadu a odrazu. Hovorí o tom, že pod akým uhlom loptička dopadne, pod takým sa aj odrazí. Vidíme, že ak dieru (bod) kam chceme trafiť zobrazíme podľa strany odrazu, tak cestu ktorou gula musí ísť nájdeme spojením gule a obrazu bodu. Vidíme, že tam platí zákon dopadu a odrazu kvôli vrcholovým uhlom a zhodnému osovému zobrazeniu.



Keď chceme na jeden odraz, zobrazíme bod kde má skončiť gula (jamku) podľa strany stolu. Ak chceme trafiť s dvoma odrazmi, zobrazíme ju dva krát. Následne spojíme gulu s bodom kam chceme trafiť úsečkou a tú zobrazíme naspať. Tak dostaneme dráhu gule.



Príklad 52: Určte uhol priamok:

$$p : 3x + 9y = 7$$

$$q : x - 2y = 5$$

Riešenie:

$$\measuredangle \mathbf{p}; \mathbf{q} = \arccos \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{p}| * |\mathbf{q}|} = \arccos \frac{3 * 1 + 9 * (-2)}{\sqrt{3^2 + 9^2} * \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 135 \Rightarrow 45$$

Príklad 53: Určte hodnoty a, b, c, d.

$$a = \log_5 \frac{1}{5}$$

$$b = \log_5 \sqrt{\frac{1}{25}}$$
$$c = 5^{\log_5 2}$$
$$d = 8^{1+\log_2 5}$$

Riešenie:

$$5^{-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow a = -1$$
$$\sqrt{\frac{1}{25}} = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow b = a = -1$$

$\log_5 2$ znamená, na koľkú treba umocniť 5, aby výsledok bol 2, preto:

$$c = 2$$
$$d = 8^{1+\log_2 5} = 2^{3+3*log_2 5} = 2^3 * (2^{\log_2 5})^3 = 2^3 * 5^3 = 1000$$

Príklad 54: Existuje funkcia, ktorá je súčasne párna aj nepárna a jej definičný obor sú všetky reálne čísla? Ak nie, dokážte, ak áno, uveďte príklad.

Riešenie: Pre danú funkciu musí platiť:

$$f(x) = -f(-x)$$

Kvôli tomu že je nepárna a :

$$f(x) = f(-x)$$

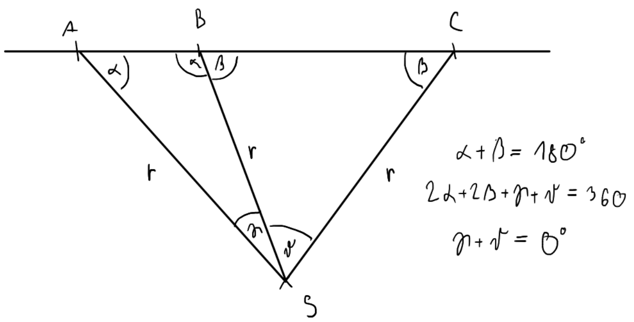
Lebo je párna. Preto musí platiť:

$$f(x) = -f(-x) = f(-x) \Rightarrow -f(x) = f(x)$$

Vidíme, že tejto rovnici vyhovuje len jediná funkcia $f(x) = 0$. Ak by funkcia v hocijakom bode mala inú hodnotu ako 0, tak neplatí vyššie spomínaná rovnica.

Príklad 55: Dokážte výrok: Žiadne 3 rôzne body tej istej priamky neležia na kružnici.

Riešenie: Predpokladajme, že $A, B, C \in p$ a $A, B, C \in k$, S je stred k a $S \notin p$. Nazvime si uhly ako sú na náčrte.



Vidno, že $\gamma + \vartheta = 0$. To je spor, lebo to nie sú platné trojuholníky a preto nemôžu tri body ležať na priamke a zároveň na kružnici.
Ostáva dokázať, že to neplatí ak $S \in p$. Dva body na priamke majú práve jeden bod, ktorý leží na rovnakej priamke a je od obidvoch vzdialený rovnako. Preto aby S bolo rovnako vzdialené od A, B aj C, by dva z týchto bodov museli byt identické.

Príklad 56: Nájdite inverznú funkciu k funkcii f. Určte definičný obor a obor hodnôt oboch funkcií.

$$f(x) = \frac{x-5}{x+7}$$

Riešenie: Aby sme našli inverznú funkciu, musíme si vyjadriť x od y.

$$y = \frac{x-5}{x+7} \Rightarrow xy + 7y = x - 5 \Rightarrow x(y-1) = -7y - 5 \Rightarrow x = \frac{7y+5}{1-y} \Rightarrow f'(x) = \frac{7x+5}{1-x}$$

Pôvodná funkcia je definovaná pre všetky reálne čísla okrem -7, kedy je menovateľ 0. Preto $D(f) = (-\infty; -7) \cup (-7; \infty)$. Podobne vieme zistiť $D(f') = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$. Obor hodnôt majú obidve $\mathbb{R}$ okrem asymptót rovnobežných s osou x, takže pre $H(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ a $H(f') = (-\infty; -7) \cup (-7; \infty)$.

Príklad 57: Určite hodnoty $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\cot(x)$ pre:

$$\tan(x) = -\frac{5}{12} \qquad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

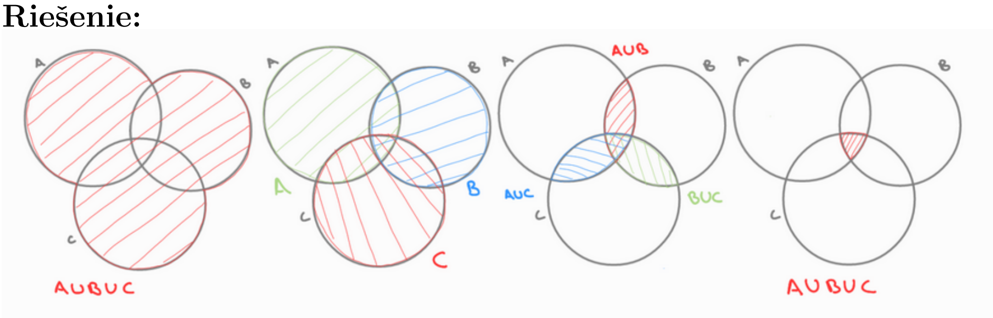
Ako by sa zmenilo riešenie pre $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

Riešenie: V zadanom intervale rovnica nemá riešenie, lebo tangens nadobúda len kladné hodnoty v intervale od 0 po $\frac{\pi}{2}$. Pre druhý interval má rovnica riešenie $x = 157,3801351$. Hodnoty sú potom $\sin(x) = \frac{5}{13}$, $\cos(x) = -\frac{12}{13}$ a $\cot(x) = -\frac{12}{5}$. K hodnotám vieme dôjsť kalkulačkou, alebo cez jednotkovú kružnicu, respektíve definíciu goniometrických funkcii v pravouhlom trojuholníku.

Príklad 58: Dokážte pomocou Vennových diagramov:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Riešenie:



Príklad 59: V priestore je daných 10 rôznych bodov, z nich žiadne 3 neležia na 1 priamke a žiadne 4 neležia v jednej rovine. Koľko priamok je nimi určených? Koľko rovín je nimi určených?

Riešenie: Keďže žiadne tri neležia na priamke, tak žiadne dvojica neurčuje rovnakú priamku. Preto chceme zistiť, koľko rôznych dvojíc vieme urobiť. To je:

$$\binom{10}{2} = 45$$

Keďže žiadne 4 body neležia v rovnakej rovine, tak každá trojica určuje inú rovinu. Preto vyberáme trojice:

$$\binom{10}{3} = 120$$

Príklad 60: Koľko telesových uhlopriečok je v kocke? Aké majú medzi sebou uhly?

Riešenie: Kocka má 4 telesové uhlopriečky. Všetky zvierajú rovnaký uhol kvôli symetrii kocky. Tento uhol vieme vypočítať napríklad z trojuholníku ABS pomocou kosínusovej vety. Ak strana kocky je $|AB| = 2k; k \in \mathbb{R}^+$, tak strany trojuholníku sú $2k$, $k\sqrt{3}$, $k\sqrt{3}$. Je to rovnoramenný trojuholník, a rátame uhol ktorý zvierajú jeho ramená. Preto ho vieme vypočítať pomocou funkcie sin, v tomto prípade ako:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{k}{k\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 70,52877937$$